

# Examen Calculus II

25 maart 2021

## Korte vragen

- 1a** Hoeveel van de onderstaande oppervlakten stellen een bol voor met straal 1?
- Het oppervlak  $x^2 + y^2 + z^2 = y$  gegeven in cartesische coördinaten.
  - Het oppervlak  $r^2 = 1$  gegeven in cilindercoördinaten
  - Het oppervlak  $R = 2 \sin \theta \sin \phi$  gegeven in bolcoördinaten
- 1b** Bepaal de richtingsafgeleide van  $f(x, y) = y^4 + 2xy^3 + x^2y^2$  in het punt  $(0, 1)$  in de richting van  $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ .
- 1c** Teken de 2-dimensionale kromme  $\mathcal{C}$  gegeven door de parametrisatie  $\mathbf{r}(t) = (t^2, t)$  waarbij  $-2 \leq t \leq 2$ . Teken vervolgens de kromtecirkel aan  $\mathcal{C}$  horende bij het punt  $(0, 0)$
- 1d** Zij  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3\}$ . Welke uitspraak over  $I = \iint_D (|x + y| - x - y) dA$  is juist?
- $I = 0$
  - $I > 0$
  - $I < 0$

## Curve

Beschouw de curve  $\mathbf{r}(t) = \frac{\sin(t)}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \cos(t)\mathbf{j} + \frac{\sin(t)}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$  waarbij  $0 \leq t \leq 2\pi$  en de elliptische cilinder  $2x^2 + y^2 = 1$ .

- 2a** Definieer een tweede elliptische cilinder zodat de curve  $\mathbf{r}$  de doorsnede van beide cilinders voorstelt. Motiveer je antwoord.
- 2b** Bepaal de lengte van de curve  $\mathbf{r}$ . Geef je berekeningen weer.
- 2c** Toon aan dat de kromming van de curve  $\mathbf{r}$  constant is. Motiveer je antwoord.

- 2d** Toon aan dat de curve  $\mathbf{r}$  volledig in een vlak ligt. Motiveer je antwoord en bepaal dit vlak.
- 2e** Beargumenteer dat de kromme  $\mathbf{r}$  een cirkel is en bepaal het middelpunt en de straal. Geef je redenering weer.

## Dubbele integraal

- 3** Onderzoek of de dubbele integraal  $\iint_D e^{-x^2-y^2} dA$  convergeert, waarbij  $D$  de unie is van het tweede en vierde kwadrant in het  $(x, y)$ -vlak. Als de integraal convergeert, bepaal dan ook haar limiet. Geef je berekeningen weer.

## Oppervlakte bepalen

- 4** Zij  $a > 0$ . Bepaal de oppervlakte ingesloten door de kromme  $\mathbf{r}(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$  met  $0 \leq t \leq 2\pi$  en de  $x$ -as. Geef je berekeningen weer.

## Volume bepalen en fluxintegraal

- 5a** Toon aan dat het volume van het deel van de bol  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  begrensd tussen de vlakken  $z = 1$  en  $z = -1$  gelijk is aan  $\frac{22\pi}{3}$ . Geef je berekeningen en argumenten duidelijk weer.
- 5b** Bepaal de flux van het vectorveld  $\mathbf{F} = (e^y, x, z)$  doorheen het deel van het boloppervlak  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  met  $-1 \leq z \leq 1$  waarbij de normaal naar buiten wijst. Geef je berekeningen weer.