

# Oefeningentoets differentiaalvergelijkingen

Lit lit dab dab

15 December 2020

Dit jaar was er maar één oefeningexamen dat ging over beide delen van de leerstof. Er waren twee vragen over het deel van Van Assche en één vraag over het deel van Lapenta.

## Vraag 1

Beschouw volgend stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

Met

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- 2.5 pt Bepaal alle eigenwaarden en eigenvectoren van  $A$ .
- 1.5 pt Stel  $A = PDP^{-1}$  met  $P$  een matrix van eigenvectoren van  $A$ . Bepaal  $e^{Dt}$ . (Je hoeft  $P$  en  $P^{-1}$  niet expliciet uit te rekenen.)
- 1 pt Bepaal de oplossing van het beginvoorwaardeprobleem.

## Vraag 2

Beschouw volgende differentiaalvergelijkingen met 2 parameters  $\alpha \in \mathbb{R}$  en  $m \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ .

$$(1 - x^2)y''(x) - (\alpha + 1)xy'(x) + m(m + \alpha)y(x) = 0$$

met volgende machtreeksoplossing:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

- a) *2 pt* Vind een recursierelatie voor  $a_n$ .
- b) *1.5 pt* Voor welke waarden van  $\alpha$  vinden we twee lineaire onafhankelijke *veeltermoplossingen*?
- c) *1.5 pt* Stel nu  $\alpha = 4$  en  $m = 2$ . Schrijf expliciet de coëfficiënten van twee onafhankelijke oplossingen op.

### Vraag 3

Beschouw volgend eigenwaardenprobleem gegeven op  $(0, \sqrt{3})$

$$3y''(x) + 2y'(x) + \frac{1}{3}y(x) = -\lambda y, \quad y(0) = y(\sqrt{3}) = 0.$$

- a) *2 pt* Bewijs dat het gegeven probleem een Sturm-Liouville probleem is en dat het bovendien regulier is.
- b) *1.5 pt* Geef alle eigenwaarden  $\lambda_n$  en eigenfuncties  $y_n$  van het eigenwaardeprobleem.
- c) *1.5 pt* Gegeven een functie  $f$  die voldoet aan

$$3f''(x) + 2f'(x) + \frac{1}{3}f(x) = 1, \quad f(0) = f(\sqrt{3}) = 0.$$

Schrijf  $f(x)$  als een (oneindige) lineaire combinatie van de eigenfuncties en bepaal de coëfficiënten van die combinatie.