

Examen analyse
Tweede kandidatuur wiskunde en natuurkunde
Januari 2004

Enige toelichting

- Je krijgt **4 uur** voor dit examen. Dit wil zeggen van **9.00 tot 13.00**. Je mag tussendoor eten of drinken.
- Het examen is **schriftelijk en open boek**. Dit wil zeggen dat je mag gebruik maken van
 - je cursus,
 - je eigen notities afkomstig uit de les, de oefenzitting of je studie thuis,
 - eventueel de cursus *Wiskundige Analyse* van de eerste kandidatuur.

Dit wil zeggen dat je **geen gebruik** mag maken van

- een zakrekenmachine of draagbare computer,
 - boeken of fotocopies uit boeken.
- Aarzel niet om me iets te vragen als er iets onduidelijk is.

Schrijf op elk blad je naam én je studierichting!

Geef straks ook je kladbladen af!

Hou je studentenkaart klaar!

Veel succes!

1. Beschouw de cilindermantel

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Stel \mathcal{O} gelijk aan het deel van C gelegen boven het xy -vlak en onder het vlak $z = 2 + y$. Oriënteer \mathcal{O} volgens de naar buiten wijzende éénheidsnormaal.

Beschouw het vectorveld $\mathbf{V}(x, y, z) = (0, xz, 0)$.

- a) Toon aan dat $\int_{\mathcal{O}} \operatorname{rot} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, dA = -2\pi$.
- b) Verifieer de Stelling van Stokes voor \mathcal{O} .

2. a) Bepaal de waarden van $\alpha \in \mathbb{R}$ waarvoor de volgende functie f integreerbaar is. Bewijs je antwoord.

$$f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} : f(x) = e^{-x} \frac{\sin x}{x^\alpha}.$$

b) Definieer

$$f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, +\infty] : f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{|x-y|^{1/2}} & \text{als } x \neq y, \\ +\infty & \text{als } x = y. \end{cases}$$

Toon heel precies aan dat

$$\int_{[0,1] \times [0,1]} f(x, y) \, d\lambda(x, y) = \frac{8}{3}.$$

Verantwoord elke stap vanuit de theorie van Lebesgue-integratie.

3. Verantwoord elke gelijkheid in de volgende redenering vanuit de theorie van Lebesgue-integratie.

Hint: Denk aan de sommatieformule voor een meetkundige reeks.

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \operatorname{Bgtg} 1 = \int_{[0,1[} \frac{1}{1+x^2} \, d\lambda(x) = \int_{[0,1[} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \right) \, d\lambda(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_{[0,1[} x^{2k} \, d\lambda(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}. \end{aligned}$$

4. Bewijs de volgende gelijkheden.

$$\text{a) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{e}.$$

$$\text{b) } \int_0^{+\infty} \frac{x^{-a}}{(x+b)^2} dx = \frac{\pi a}{b^{a+1} \sin(\pi a)},$$

waarbij $0 < a < 1$ en $b > 0$ gegeven constanten zijn.

5, alleen voor natuurkunde.

Bereken het zwaartepunt van de kubus $K = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ met dichtheidsverdeling $\rho(x, y, z) = xy$. (Antwoord: $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2})$)

5, alleen voor wiskunde.

a) Definieer

$$h : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} : h(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Toon aan dat voor alle $n \in \mathbb{Z}$ geldt dat $\text{Res}(h, n) = (-1)^n$.

b) Leg in enkele lijnen en zonder technische details uit dat onder exact dezelfde voorwaarden als in Stelling 3.72, geldt dat

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^{+N} (-1)^n f(n) = - \sum_{j=1}^k \text{Res}(f(z) \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, z_j).$$

c) Gebruik dit om te bewijzen dat

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(3n+1)} = \pi \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \right).$$