

Examen Differentiaalvergelijkingen : 21 december 2016

Opgave 1. Beschouw het volgende Sturm-Liouvilleprobleem

$$(e^{2x}y'(x))' + \lambda e^{2x}y(x) = 0$$

met randvoorwaarden $y(0) = y(1) + y'(1) = 0$.

- Herschrijf naar een lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten en los deze op voor het algemene probleem zonder randvoorwaarden. Maak hiervoor onderscheid voor $\lambda < 1, \lambda = 1, \lambda > 1$.
- Vind vervolgens alle mogelijke eigenwaarden λ en bijbehorende eigenfuncties.

Opgave 2. Beschouw een dunne staaf met lengte $L = 50\text{cm}$ en thermische diffusiecoëfficiënt $k > 0$ met initiële temperatuur $u_0 = 100$. Op tijd $t = 0$ wordt deze aan het zijdelingse oppervlak geïsoleerd en de uiteinden worden ondergedompeld in ijs met temperatuur 0.

- Toon aan dat de diffusievergelijking voldoet aan

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \\ u(0, t) = u(50, t) &= 0 \\ u(x, 0) &= 100\end{aligned}$$

en vind de eigenwaarden en -functies, en de uiteindelijke uitdrukking voor $u(x, t)$

- Bereken u voor $t = 1800\text{s}$ in het midden van de staaf voor een ijzeren staaf $k = 0,15$ en een betonnen $k = 0,05$.