

Meetkunde II

25 Augustus 2015

Mondeling gedeelte

1 We werken in \mathbb{E}^2 .

a) Toon aan dat de verzameling cirkels die in $(0,0)$ de rechte $x + y = 0$ als raaklijn hebben gegeven wordt door $\{C_t \longleftrightarrow x^2 + y^2 = t(x + y) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

b) Bereken de snijpunten van zo'n cirkel C_t met de lemniscaatkromme $C \longleftrightarrow (x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.

c) Gebruik de gevonde resultaten om een rationale parametrisatie te geven van de lemniscaatkromme.

d) Wat voorspelt de stelling van Bezout over de multipliciteiten van de doorsneden? Komt dit overeen met wat je gevonden hebt in b)?

2 a) Definieer de hoofdkrommingen van een oppervlak M in \mathbb{E}^3 d.m.v. normale doorsneden.

b) Noteer met k_1 en k_2 de hoofdkrommingen van M . Zijn de volgende beweringen juist of fout? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

1. Als $k_1 + k_2$ identiek nul is, dan zijn k_1 en k_2 constant op M .

2. Als $k_1 - k_2$ identiek nul is, dan zijn k_1 en k_2 constant op M .

Schriftelijk gedeelte

1 Beschouw in $\mathbb{R}P^3$ vlakken $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5$ en π_6 zodanig dat de doorsnede van de vlakken in elk van de volgende verzamelingen een rechte is:

$$\{\pi_1, \pi_2, \pi_3\}, \{\pi_2, \pi_4, \pi_5\}, \{\pi_1, \pi_4, \pi_6\}$$

Toon aan dat de doorsnede $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 \cap \pi_4 \cap \pi_5 \cap \pi_6$ niet leeg is.

2 Beschouw in het affiene vlak de krommen $C_1 \longleftrightarrow x^2 - y^2 - 1 = 0$ en $C_2 \longleftrightarrow x^2 - y^3 - 1 = 0$.

a) Toon aan dat C_1 en C_2 geen meervoudige punten hebben. Laat ook zien dat beide krommen symmetrisch zijn t.o.v. de y -as.

b) Toon aan dat $(1,0)$ en $(-1,0)$ buigpunten zijn van C_2 .

c) Bereken de snijpunten van de krommen en de raaklijnen.

d) *[Vergeten]*

e) Maak een schets van beide krommen met hun snijpunten.

5 Beschouw de verzameling $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, a, b, c > 0\}$.

a) Toon aan dat M een oppervlak is.

b) Onder welke voorwaarden op a, b en c is de gemiddelde kromming in $(a, 0, 0)$ gelijk aan 0?

c) *[Vergeten]*