

# Examen: Complexe functies

23 Januari 2018

## Vraag 1 [8ptn]

*Bij deze deelvragen wordt enkel naar het antwoord gekeken en hebben de berekeningen of motivaties die je doet geen belang.*

1. Bepaal  $Re(\cos(i))$ .
2. Rangschik de volgende getallen van kleinste absolute waarde naar de grootste:  $e^{i\pi}, e^{-\pi}, ie^{\pi}, e^{-\pi} - i$ .
3. Zijn er complexe getallen  $z$  waarvoor geldt  $|\cosh(z)| \leq |z|$ ?
4. Hoeveel paren complexe getallen  $(z, w)$  zijn er die voldoen aan het volgende stelsel vergelijkingen.

$$\begin{aligned}z^2 w^2 &= 2 \\ w &= 2z\end{aligned}$$

5. Hoeveel mogelijke waarden in  $\mathbb{C}$  zijn er voor  $7^{1/3}$ ?
6. Als  $z$  analytische functies (op de eenheidsschijf  $\{|z| \leq 1\}$  samenvallen op het lijnstuk  $x \in [0, 1]$ , zijn ze dan gelijk op de hele schijf?
7. Wat voor een singulariteit heeft de functie  $\frac{\sin(z)-z}{z^2}$  in 0?
8. Wat voor een singulariteit heeft de functie  $\log(z)$  in 0?
9. De functie  $f$  heeft een pool van 1<sup>ste</sup> orde in 0 en de functie  $g$  is analytisch in een omgeving van 0. Wat voor een singulariteit heeft dan de functie  $fg$  in 0?
10. Een functie  $f$  heeft een Laurent ontwikkeling  $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$  rond  $z = 0$ . Wat is het residu van de functie  $\frac{1}{z}f(z)$  in 0?

## Vraag2 [2ptn]

*Voor de volgende vragen is de denkwijze wel zeer belangrijk, maar het rekenwerk zou kort moeten zijn.*

Zij  $a > 0$ . Bereken de integraal

$$\oint_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\cos(x)}{x^2 + a^2}$$

### Vraag 3 [2ptn]

Vind alle analytische functies  $f$  gedefinieerd op  $\mathbb{C}$  (zo die er zijn) waarvoor  $\operatorname{Re}(f(z))$  onafhankelijk is van  $\operatorname{Im}(z)$ .

### Vraag 4 [2ptn]

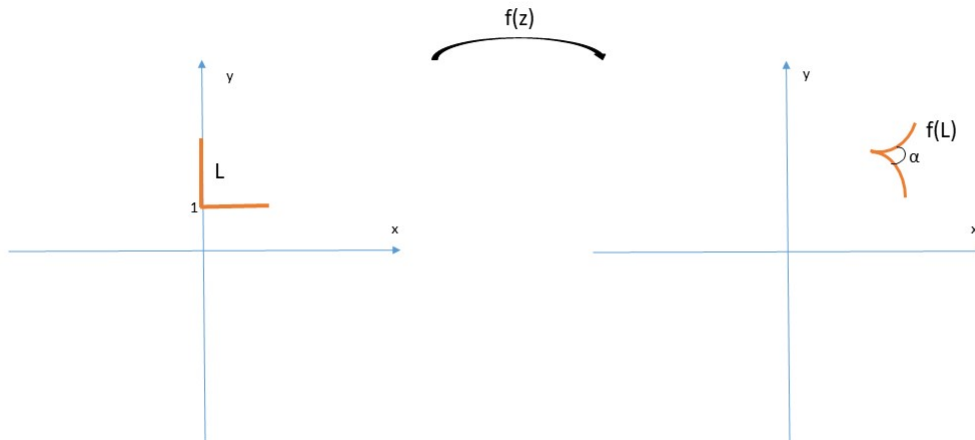
Bepaal de contourintegraal

$$\oint_{\Gamma} dz \frac{1}{1+z^5}$$

waarbij  $\Gamma$  in tegenwijzerin loopt over de cirkel  $\{|z| = 3\}$ . (Deze vraag zou snel opgelost kunnen worden mits het nodige denkwerk.)

### Vraag 5 [2ptn]

Beschouw een afbeelding  $f : z \rightarrow \sqrt{z}$  die het gebied  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  afbeeldt op het halfvlak  $\operatorname{Im}(z) > 0$ . Zij  $L$  een L-vorm gelegen zoals in de figuur. De afbeelding  $f$  transformeert deze L-vorm in een figuur  $f(L)$ , die dus ook een hoek bepaalt (al tussen de benen van de L). Wat is de grootte van deze hoek?



### Vraag 6 [2ptn]

Iemand stelt voor om  $w^z$  (met  $w, z \in \mathbb{C}$ ) in het algemeen te definiëren als de volgende meerwaarde functie:  $e^{z \log(w)}$ .

1. Als we voor  $z$  de waarde  $1/2$  nemen, krijgen we dan met deze definitie dezelfde waarden voor  $w^{1/2}$  als vroeger (cursus)? Leg uit of geef een tegenvoorbeeld.
2. Vind (met deze definitie) alle waarde van  $i^i$ .

### Vraag 7 [2ptn]

Zij  $f$  een analytische functie op heel  $\mathbb{C}$  en zodat  $|f(z)| \geq 1$  (voor alle  $z$ ). Wat kan je over deze functie zeggen?