

**Examen Wiskunde I**  
**Bachelor of Science in Biochemie & Biotechnologie, Chemie,**  
**Geografie, Geologie, Informatica, en**  
**Schakelprogramma Master Toegepaste Informatica**  
**maandag 16 januari 2012, 9:00–13:00**

**Naam:**

**Studierichting:**

- Het examen bestaat uit 5 vragen. Alle vragen tellen even zwaar mee.
- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen. Schrijf de antwoorden op deze bladen en vul eventueel aan met losse bladen.
- U mag de cursustekst en een rekenmachine (niet-symbolisch) gebruiken.
- Succes!

**Naam:**

**Vraag 1** Neem  $p \in \mathbb{R}$  en beschouw de kromme gegeven door de vergelijking

$$y^2 = x^3 - px + p$$

- (a) Stel de raaklijn op aan de kromme in het punt  $P : (1, -1)$ .
- (b) Neem  $p = 2$ . De raaklijn uit onderdeel (a) snijdt de kromme nog in een ander punt  $Q$ . Bereken  $Q$ .

---

**Antwoord:**

**Naam:**

**Vraag 2** We vragen ons af of de gelijkheid

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{an}{bn+1} \quad (1)$$

geldt voor  $n \in \mathbb{N}_0$  en zekere getallen  $a$  en  $b$ .

- (a) Bepaal waarden voor  $a$  en  $b$  zodanig dat (1) geldt voor zowel  $n = 1$  als  $n = 2$ .
- (b) Bewijs met het principe van volledige inductie dat de gelijkheid (1) geldt voor elke  $n \in \mathbb{N}_0$ . Neem hierbij de waarden van  $a$  en  $b$  die u in onderdeel (a) gevonden hebt.

---

**Antwoord:**

**Naam:**

**Vraag 3** We beschouwen de functie

$$f(x) = \frac{1}{ce^x - 1}$$

met  $c > 1$

(a) Bereken de Taylorveelterm van  $f$  rond  $x = 0$  van graad 2.

(b) Bereken de integraal

$$\int_0^{\infty} f(x) dx.$$

Opmerking: Als het met algemene  $c$  niet lukt, neem dan  $c = 2$ .

---

**Antwoord:**

**Naam:**

**Vraag 4** De kromme  $K_c$  is gegeven in poolcoördinaten door

$$K_c : \quad r = \frac{4}{c + \cos \theta}, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}.$$

(a) Schets de kromme  $K_c$  voor  $c = 1$ . Wat voor soort kromme is  $K_c$  voor  $c = 1$ ?

(b) Bereken de lengte van  $K_c$  voor de waarde  $c = 0$ .

Opmerking: Dit kan met weinig rekenwerk. Het kan ook met veel rekenwerk...

---

**Antwoord:**

**Naam:**

**Vraag 5** We willen het punt op de ellips

$$\frac{1}{4}x^2 + y^2 = r^2$$

bepalen dat het dichtst ligt bij  $(1, 0)$ . Hierin is  $r > 0$  een gegeven waarde.

- (a) Formuleer het probleem als een minimalisatieprobleem met nevenvoorwaarden. Stel de bijbehorende vergelijkingen van Lagrange op.
- (b) Welk punt op de ellips ligt het dichtst bij  $(1, 0)$  ? Uw antwoord hangt af van de waarde van  $r$ .

[Hint: voor sommige waarden van  $r$  is het antwoord gelijk aan  $(2r, 0)$ , maar niet voor alle waarden van  $r$ .]

---

**Antwoord:**