

Klassieke Mechanica Examen NM

26 januari 2016

Vraag 1 : Mondeling [4pt]

Een emmer met water roteert met hoeksnelheid ω . Er ontstaat na enige tijd een stationaire toestand zodat het water even snel roteert als de emmer, en het water naar de buitenkant toe hoger staat. Wat is de hoek die het wateroppervlak maakt op afstand r van de verticale as doorheen het middelpunt? Leg je oplossingsstrategie uit.

Vraag 2 : Schriftelijk [8pt]

- Beschouw een actie gegeven door

$$S = \int dt \sum_a \dot{q}^a \dot{q}^a - V(q) \quad (1)$$

Leid de Euler-Lagrange vergelijkingen af. [2pt]

- Stel nu dat de actie gegeven is door

$$S = \int dt \sum_{ab} G_{ab} \dot{q}^a \dot{q}^b \quad (2)$$

Wat is de Hamiltoniaan? [2pt]

- Waarom mag je aannemen dat G_{ab} symmetrisch is? [1pt]
- Toon vertrekkende van de gewone bewegingsvergelijkingen volgende bewegingsvergelijking aan

$$\ddot{q}^d + \frac{1}{2} \sum_{abc} F^{da} (\partial_c G_{ab} + \partial_b G_{ac} - \partial_a G_{bc}) \dot{q}^b \dot{q}^c = -\frac{1}{2} \sum_a F^{da} \partial_a V \quad (3)$$

Hier is F de inverse van G , dus zo dat $\sum_a F^{ba} G_{ac} = \delta_c^b$ en $\partial_a = \frac{\partial}{\partial q^a}$.¹ [3pt]

Vraag 3: Schriftelijk [3pt]

Gegeven is een centrale kracht $F(r)$ die inwerkt op een deeltje. Er geldt ook dat $r = ke^{\alpha\theta}$.

- Bepaal $f(r)$. [1pt]
- Bepaal r en θ in functie van de tijd. [1pt]
- Bepaal de energie van deze beweging.

¹In de opgave op het examen was er voor het rechterlid gewoon $-\sum_a \partial_a F^{da} V$ gegeven zonder de factor $\frac{1}{2}$ maar meerdere studenten kwamen deze uit, dus dit is waarschijnlijk een fout in de opgave.

Vraag 4: Schriftelijk [5pt]

Gegeven twee deeltjes met massas m_1 en m_2 , die elkaar gravitationeel aantrekken. Op tijd $t = 0$ bevinden ze zich op een afstand l van elkaar. Bovendien is dan \mathbf{v}_1 evenwijdig aan \mathbf{v}_2 , en deze kunnen in dezelfde of tegengestelde richting wijzen. Hun impactparameter is gegeven door p . Wat moet de relatieve snelheid minimum zijn opdat de deeltjes niet vastraken in elkaars gravitatie?