

**Bewijzen en Redeneren**  
**L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X opdracht augustus/september 2011**

- Werk de volgende opdracht individueel uit. U moet hier alleen aan werken. Geef ook geen files door aan anderen. Ingediende opdrachten die te zeer op elkaar lijken worden met 0 beoordeeld.
- Maak een L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X file en noem ze **Achternaam-Voornaam.tex** met uw achternaam aaneengeschreven. Deze naamgeving is verplicht.
- Deze opdracht telt mee voor 2 punten op 20 bij de bepaling van het eindcijfer voor Bewijzen en Redeneren. Zowel het correct en verzorgd gebruik van L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X wordt beoordeeld als het correct en verzorgd opschrijven van de wiskunde in volledige goed-lopende zinnen.
- Let bij het gebruik van L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X zeker op de volgende punten. Hiermee zullen we bij de quoteringsrekening houden.
  - Maak de kop van uw document met `\title` en `\author`. Vermeld bij `\author` ook uw studentnummer.
  - Voorzie een aantal gecentreerde formules van een nummer. Zorg er voor dat er tenminste één keer naar een formule terugverwezen wordt. Gebruik de L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X commando's `\label` en `\ref`.
  - Maak een referentielijst waarin u de literatuur vermeldt die u gebruikt. Als u een bewijs uit de cursus volgt, vermeld dat dan en neem in dat geval de cursustekst op in de lijst van referenties. Verwijs naar de referenties met het commando `\cite`.
- Stuur uw `.tex` bestand en het bijbehorende `.pdf` bestand naar Prof. Arno Kuijlaars ([arno.kuijlaars@wis.kuleuven.be](mailto:arno.kuijlaars@wis.kuleuven.be)) en naar de monitor Dr. Christophe Smet ([christophe.smet@wis.kuleuven.be](mailto:christophe.smet@wis.kuleuven.be))
- De deadline voor deze opdracht is woensdag 7 september 2011 om 24 uur.
- Veel succes!

## Het rekenkundig/meetekundig gemiddelde

Voor deze opdracht maak je **individueel** een *artikel* dat handelt over het rekenkundig en meetkundig gemiddelde. Zoals bekend is het **rekenkundig gemiddelde** van twee reële getallen  $a$  en  $b$  gelijk aan

$$\frac{1}{2}(a + b).$$

Voor twee strikt positieve reële getallen  $a > 0$  en  $b > 0$  kennen we ook het **meetkundig gemiddelde**, dat gelijk is aan

$$\sqrt{ab}.$$

Bij gegeven waarden  $a_0$  en  $b_0$  met  $b_0 > a_0 > 0$  kunnen we iteratief twee rijen  $(a_n)$  en  $(b_n)$  construeren door de definitie

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n). \quad (1)$$

Dit is de iteratie van het rekenkundig/meetekundig gemiddelde.

Uw artikel moet het volgende bevatten.

- Formuleer in een stelling de eigenschap dat

$$a < \sqrt{ab} < \frac{1}{2}(a + b) < b$$

geldt voor alle strikt positieve getallen  $a$  en  $b$  met  $a < b$ .

- Bewijs deze stelling.
- Beschrijf de iteratie van het rekenkundig/meetekundig gemiddelde. Illustreer door middel van een zelf gekozen voorbeeld.
- De rijen  $(a_n)$  en  $(b_n)$  die gegenereerd worden door (1) zijn convergent. Formuleer dit als een stelling en geef een bewijs.
- De twee limieten zijn aan elkaar gelijk. Dat wil zeggen dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n. \quad (2)$$

Formuleer ook dit in uw artikel en geef een bewijs.

- Op de Wikipedia pagina [http://en.wikipedia.org/wiki/Arithmetic-geometric\\_mean](http://en.wikipedia.org/wiki/Arithmetic-geometric_mean) vindt u een formule voor de limieten in (2) in termen van de beginwaarden  $a_0$  en  $b_0$ . Geef deze formule in uw artikel. Een bewijs hiervan hoeft u niet te geven.