

VOORBEELD van Examen oefening 3BACH Kwantummechanica

Oefening (10 pt)

We bepalen de grootte van $g_e - 2$, de anomalie van het magnetisch moment van het elektron. Een elektron, met massa m en lading q (<0) beweegt in een statisch uniform magneetveld dat volgens de z-as gericht is. De Hamiltoniaan is

$$H = (\mathbf{P} - q\mathbf{A})^2 / 2m - \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = m\mathbf{V}^2 / 2 - \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$$

Hierin is \mathbf{A} de vectorpotentiaal, met de keuze van de ijk zodanig dat $\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{R} / 2$. De grootheid $\boldsymbol{\mu} = g_e (q/2m) \mathbf{S}$ is het intrinsiek of “spin”- magnetisch moment van het elektron. We schrijven $g_e = 2(1+a)$, met a de anomalie (die nul is in Dirac’s theorie). Kwantumelektrodynamica voorspelt $a = \alpha / 2\pi$, met $\alpha \cong 1/137$ de fijnstructuurconstante. De cyclotronfrequentie noteren we met $\omega = qB/m$; de Larmorprecessiefrequentie is $\omega_L = g_e qB / 2m = g_e \omega / 2$.

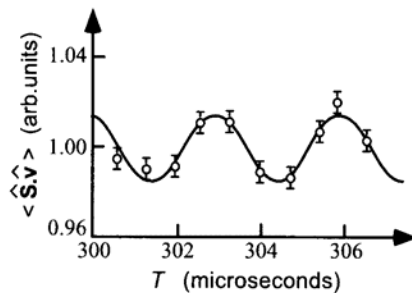
a) Bereken de drie commutatoren $[\mathbf{V}, H]$ van de componenten van de snelheidsoperator met de Hamiltoniaan. Tip: bereken eerst de commutatoren van de componenten van \mathbf{V} onderling. (2 pt)

b) Beschouw de drie verwachtingswaarden $C_1(t) = \langle V_z S_z \rangle$, $C_2(t) = \langle V_x S_x + V_y S_y \rangle$ en $C_3(t) = \langle V_y S_x - V_x S_y \rangle$. Bepaal de tijdsevoluties van deze grootheden en toon aan dat ze een stelsel vormen van lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten. Definieer $\Omega = a\omega$. (2 pt)

c) Bepaal nu de algemene vorm van de verwachtingswaarde $\langle \mathbf{V} \cdot \mathbf{S} \rangle(t)$ door gebruik te maken van de oplossingen van het lineair differentiaalstelsel uit b).

Nota: Indien $\langle \mathbf{V} \cdot \mathbf{S} \rangle(t)$ niet afhangt van de tijd dan kunnen we besluiten dat de snelheidsvector van het elektron en de spin van het elektron een even snelle precessie uitvoeren in het magnetisch veld. Indien $\langle \mathbf{V} \cdot \mathbf{S} \rangle(t)$ wel afhangt van t dan zijn de twee frequenties (cyclotron en Larmor) niet gelijk aan elkaar, d.w.z. $a \neq 0$. (2 pt)

d) De figuur toont de experimentele resultaten voor $\langle \mathbf{V} \cdot \mathbf{S} \rangle(t)$ voor een bundel elektronen in een magneetveld $B = 9.4 \times 10^{-3}$ Tesla (in de figuur staat T voor de tijd). Schat de numerieke waarde van de anomalie a door gebruik te maken van deze meetgegevens en uw analytisch resultaat verkregen in c). (3 pt)



e) Vergelijk uw resultaat voor a met de voorspelling van kwantumelektrodynamica (QED). Werk nauwkeurig tot op drie relevante cijfers. (1 pt)