

Differentiaalvergelijkingen

Oefeningenexamen 1

2021-2022

Vraag 1: Gegeven het volgende Lotka-Volterra systeem:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 7x - x^2 - xy \\ \frac{dy}{dt} = -5y + xy \end{cases}$$

- (a) (0.5 pt.) Is dit systeem jager-prooi, competitief of samenwerkend?
- (b) (3 pt.) Vind de drie kritieke punten van het systeem en bepaal hun aard.
- (c) (1.5 pt.) Maak een schets van het faseportret in het eerste kwadrant. Stel dat op tijd $t = 0$ de populatie gegeven is door $(4, 10)$, hoe zal de populatie evolueren in de tijd?

Vraag 2: Gegeven de volgende differentiaalvergelijking:

$$(1 - x^2)y'' - 3xy' + n(n + 2)y = 0, \quad n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

- (a) (2 pt.) Vind de recursie voor de coëfficiënten a_k van de machtreeksoplossing

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

- (b) (1 pt.) Los de recursie voor de a_k op.
- (c) (1 pt.) Er is een *veeltermoplossing*. Waar kunnen we dat aan zien?
- (d) (1 pt.) Neem nu $n = 0$. Dan is de constante functie een oplossing. De andere lineair onafhankelijk oplossing is een reeks die niet afbreekt. Voor welke x convergeert deze *niet-veeltermoplossing* in elk geval?