

PROEFEXAMEN LINEAIRE ALGEBRA:
Eerste bachelor Wiskunde, Informatica en Fysica
vrijdag 24 november 2006

Naam:

Voornaam:

Richting + Reeks:

- Schrijf op elk blad je naam.
- Begin voor elke vraag een nieuw blad. Schrijf 'BLANCO' op het vragenblad vóór de vragen waarop je eventueel geen antwoord weet.
- Enkel het net afgeven.

Veel succes!

1. (a) Zij V een vectorruimte. Leg uit wat een minimaal voortbrengend deel is van V en bewijs dat een minimaal voortbrengend deel steeds een basis is van V .
(b) Zij V een eindigdimensionale vectorruimte. Zij $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ en $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ twee basissen van V .
 - i. Definieer de matrix van basisverandering A van \mathcal{E} naar \mathcal{F} .
 - ii. Geef en bewijs de formule die het verband geeft tussen de coördinaten van een vector $v \in V$ ten opzichte van \mathcal{E} en \mathcal{F} in termen van A .

2. Zij

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & y & 4 \\ 5 & 6 & z \end{vmatrix} = 0 \right\}.$$

Is V een lineaire deelruimte van \mathbb{R}^3 ?

3. Beschouw

$$U_a = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

voor elke $a \in \mathbb{R}$.

(a) Toon aan:

$$\begin{array}{c} U_a \text{ is een basis van } \mathbb{R}^{2 \times 2} \\ \Downarrow \\ a \neq 1 \text{ en } a \neq -1. \end{array}$$

(b) Geef de matrix van basisverandering van U_2 naar U_0 .

4. Zij

$$U = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid b = 2a - c, d = 3a\} \subset \mathbb{R}^4.$$

- (a) Toon aan dat U een lineaire deelruimte is van \mathbb{R}^4 .
- (b) Geef twee verschillende supplementaire deelruimtes van U . (Dus we zoeken W en W' lineaire deelruimtes van \mathbb{R}^4 zodanig dat $W \neq W'$ en $U \oplus W = \mathbb{R}^4 = U \oplus W'$.)