

# Studietoets Analyse I (2011)

NAAM en voornaam: .....

Studierichting: .....

---

Vraag	1	2	3
Score			

---

1. Zij  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  een functie gedefinieerd op een gesloten begrens interval  $I$ . We noemen  $f$  **Lipschitzcontinu** op  $I$  als er een  $M \in \mathbb{R}^+$  bestaat zo

$$|f(x) - f(y)| \leq M |x - y|$$

voor alle  $x, y \in I$ .

- (a) Illustreer met een voorbeeld dat Lipschitzcontinuïteit een strikt sterkere eigenschap is dan continuïteit.
  - (b) Veronderstel dat  $f$  afleidbaar is op  $I$  en dat  $f'$  continu is op  $I$ . Toon aan dat  $f$  Lipschitzcontinu is op  $I$ .
  - (c) En hoe zit het omgekeerd? M.a.w. als  $f$  Lipschitzcontinu is op  $I$ , mag je dan besluiten dat  $f$  afleidbaar is op  $I$  en dat  $f'$  continu is op  $I$ ?
2. Zij  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  een rij in  $\mathbb{C}$  die naar nul convergeert. Bestaat er altijd een deelrij  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  zo dat de reeks  $\sum_k x_{n_k}$  absoluut convergeert? Argumenteer!
3. Bestaat er een continue functie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  waarvoor

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \quad \text{en} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

en die **niet** uniform continu is op  $\mathbb{R}$ ? Argumenteer!

*Deze toets zal opgevraagd worden in de les van 26/04/11. Gelieve je antwoorden samen te nieten met dit opgaveblad in de linkerbovenhoek.*