

Studietoets Analyse I (2013)

NAAM en voornaam:

Studierichting:

Vraag	1	2	3	4
Score				

1. Zij $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een functie gedefinieerd op een gesloten begrens interval I . We noemen f **Lipschitzcontinu** op I als er een $M \in \mathbb{R}^+$ bestaat zo

$$|f(x) - f(y)| \leq M |x - y|$$

voor alle $x, y \in I$.

- Illustreer met een voorbeeld dat Lipschitzcontinuïteit een strikt sterkere eigenschap is dan continuïteit.
 - Veronderstel dat f afleidbaar is op I en dat f' continu is op I . Toon aan dat f Lipschitzcontinu is op I .
 - En hoe zit het omgekeerd? M.a.w. als f Lipschitzcontinu is op I , mag je dan besluiten dat f afleidbaar is op I en dat f' continu is op I ?
2. Zij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een rij in \mathbb{C} die naar nul convergeert. Bestaat er altijd een deelrij $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ zo dat de reeks $\sum_k x_{n_k}$ absoluut convergeert? Argumenteer!
3. Bestaat er een continue functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ waarvoor

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \quad \text{en} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

en die **niet** uniform continu is op \mathbb{R} ? Argumenteer!

4. Bewijs zorgvuldig de regel van de l'Hôpital in de situatie waarbij
- het domein waarop f en g gedefinieerd zijn, gelijk is aan $]1, +\infty[$.
 - het punt a waarin de limiet berekend wordt, gelijk is aan 1.
 - $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -\infty$.
 - $\lim_{x \rightarrow 1} (f'(x)/g'(x)) = 5$.

Deze toets zal opgevraagd worden in de les¹ van 16/04/13. Gelieve je antwoorden samen te nieten met dit opgaveblad in de linkerbovenhoek.

¹Als je gemakkelijk je antwoorden kan inscannen of op een andere manier kan digitaliseren, dan mag je ook al tijdens de paasvakantie je antwoorden per mail bezorgen. Dit zou ons toelaten om wat tijd te winnen bij het verbeterwerk zodat de klassikale feedback iets vroeger kan gebeuren.