

# Les 1 30/09

PRINT

INPUT - OUTPUT

```
import math
a=5
b=1
c=-2
discriminant=b**2-4*a*c
x1=(-b+math.sqrt(discriminant))/(2*a)
x2=(-b-math.sqrt(discriminant))/(2*a)
print("eerstenulpuntis:",x1)
print("tweedenulpuntis:",x2)
```

Veranderen met een `input`

```
b*b = b**2
```

`a = 5`: voor de waarde van a w er een plaats vrijgehouden in het geheugen, deze plaats bevat nu de waarde 5. a kan nu gebruikt w als variabele in een berekening  
= toekenningsopdracht

Gehele deling = de deling zonder de rest (steeds een natuurlijk getal)

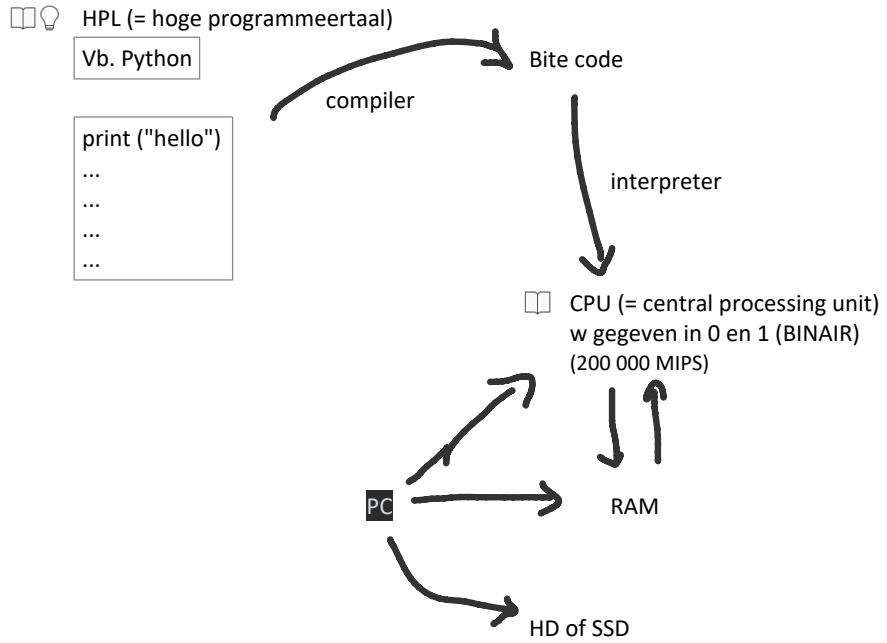
Gehele deling a en b: `a//b`

Rest gehele deling a en b: `a%b`

Overige commando's

```
input()
int()
float()
string()
```

Integer = gehele getallen  
Float = rationale getallen  
String = tekst



★ Veel gemaakte programmafouten

Syntaxfouten = fouten spelling van python

Uitvoeringsfouten = fouten tijdens draaien programma

Logische fout = fout in opbouw programma

★ Relationale operatoren in Python

Python	Math Notation	Description
>	>	Greater than
>=	≥	Greater than or equal
<	<	Less than
<=	≤	Less than or equal
==	=	Equal
!=	≠	Not equal

💡 "=" kent een waarde toe  
 "==" kijkt een waarde na  
 Gebruikt in if of while constructies

**Vergelijking van strings:** volgorde en hiërarchie!  
 All UPPERCASE letters come before lowercase  
 'space' comes before all other printable characters  
 Digits (0-9) come before all letters  
 See Appendix A for the Basic Latin (ASCII) Subset of Unicode

Aparte commando's string en number. Zie HB!

💡 Datatypes:

String  
 Float

**Boolean**

Twee waarden: true, false  
 Boolean variabelen: failed = true/false  
 Operatoren: and, or, not (denk aan waardetabellen!)

★ Boolean variabelen

AND

```
if temp > 0 and temp < 100 :
    print("Liquid")
```

OR

```
if temp <= 0 or temp >= 100 :
    print("Not liquid")
```

NOT

```
if not attending or grade < 60 :
    print("Drop?")
```

```
if attending and not(grade < 60) :
    print("Stay")
```

--> betere versie

```
if attending and grade >= 60 :
    print("Stay")
```

**Geneste commando's**

Vb.: programma discriminant (uitgebreid, les 2)  
 Vb.: schaal van richter (let op de verschillende interpretaties!)

```
if richter >= 8.0 : # Handle the 'special case' first
    print("Most structures fall")
else:
    if richter >= 7.0 :
        print("Many buildings destroyed")
    else:
        if richter >= 6.0 :
            print("Many buildings damaged, some collapse")
        else:
            if richter >= 4.5 :
                print("Damage to poorly constructed buildings")
            else : # so that the 'general case' can be
                handled last
                print("No destruction of buildings")
```

=

```
if richter >= 8.0 : # Handle the 'special case' first
    print("Most structures fall")
elif richter >= 7.0 :
    print("Many buildings destroyed")
elif richter >= 6.0 :
    print("Many buildings damaged, some collapse")
elif richter >= 4.5 :
    print("Damage to poorly constructed buildings")
else : # so that the 'general case' can be handled last
    print("No destruction of buildings")
```

!=

```
if richter >= 8.0 :
    print("Most structures fall")
if richter >= 7.0 :
    print("Many buildings destroyed")
if richter >= 6.0 :
    print("Many buildings damaged, some collapse")
if richter >= 4.5 :
    print("Damage to poorly constructed buildings")
```

Vb. **Count-controlled loops:** Som 1 tot n  
 berekenen = (n\*(n+1))/2

- Count-controlled loops  
= while-loop onder invloed van een telopdracht

```
counter = 1      # Initialize the counter
while counter <= 10 : # Check the counter
    print(counter)
    counter = counter + 1 # Update the loop variable
print("----")
```

- Event-controlled loops  
= while-loop onder invloed van een voorwaarde

```
##
# This program computes the time required to double an investment.
#

# Create constant variables.
RATE = 5.0
INITIAL_BALANCE = 10000.0
TARGET = 2 * INITIAL_BALANCE

# Initialize variables used with the loop.
balance = INITIAL_BALANCE
year = 0

# Count the years required for the investment to double.
while balance < TARGET :
    year = year + 1
    interest = balance * RATE / 100
    balance = balance + interest

# Print the results.
print("The investment doubled after", year, "years.")
```

★ Veel gemaakte programmafouten

Foute voorwaarde, vb.:  $\geq$  ipv  $>$   
 Oneindige loops  
 Loop die maar 1x mee gaat

Sentinel values

Gebruikt in een while-loop die een reeks getallen leest en controleert. Er is geen duidelijkheid over wanneer de while-loop moet stoppen, dus voordat deze start wordt er een waarde ingesteld zodat de loop deze leest als 'einde loop'.

Opm.: in het algemeen wordt de waarde -1 hiervoor gebruikt

While getal != -1:	Start je commando op deze manier om de sentinel variabele te installeren
--------------------	--

Vb.: berekening gemiddeld salaris

```
# initialisation
total = 0.0
count = 0
# Initial read - read the first value
salary = float(input("Enter a salary or -1 to
```

0	vraag getal n
1	Som = 0
2	Voor elke " " $\geq$ 0 and " " $\leq$ 0 som $\leftarrow$ som + 1
3	Schrijf som uit

```
n=int(input("geefwardevoorn"))

#startwaarde
som=0
teller=0

while(teller<n):
teller=teller+1
som=som+teller

print("desomis",som)
```

💡 Uitvoering loop voorbeeldprogramma event-controlled loop

1 Check the loop condition  
 balance = 10000.0  
 year = 0  
 while balance < TARGET :  
 year = year + 1  
 interest = balance \* RATE / 100  
 balance = balance + interest  
 The condition is true

2 Execute the statements in the loop  
 balance = 10500.0  
 year = 1  
 interest = 500.0  
 while balance < TARGET :  
 year = year + 1  
 interest = balance \* RATE / 100  
 balance = balance + interest

3 Check the loop condition again  
 balance = 10500.0  
 year = 1  
 interest = 500.0  
 while balance < TARGET :  
 year = year + 1  
 interest = balance \* RATE / 100  
 balance = balance + interest  
 The condition is still true

4 After 15 iterations  
 balance = 20789.28  
 year = 15  
 interest = 989.97  
 while balance < TARGET :  
 year = year + 1  
 interest = balance \* RATE / 100  
 balance = balance + interest  
 The condition is no longer true

5 Execute the statement following the loop  
 balance = 20789.28  
 year = 15  
 interest = 989.97  
 while balance < TARGET :  
 year = year + 1  
 interest = balance \* RATE / 100  
 balance = balance + interest  
 print(year)

```
finish: "))
# We will keep on processing values until a
negative value is input
while salary >= 0.0 :
    total = total + salary
    count = count + 1
    # Next read
    salary = float(input("Enter a salary or -1 to
finish: "))
# Compute an print average salary
if count > 0:
    average = total / count
    print("Average salary is", average)
else:
    print("No data was provided...")
```



# Les 3 14/10

14 October 2021 14:08

FOR

LISTS

TUPLES

## For-loop

Lijkt op While-loop  
Verkort: geen teller  
(als teller w gevraagd in opgave, gebruik dan wel while!)  
Maakt gebruik van CONTAINER

## Container = lijst of verz van aantal tekens

Opm.: niet per def een range, wel vaak voorkomend

Vb.: `range(x) = 0, 1, 2, ..., x-1`

`For i in range(x) --> print(i)`

Vb.: `range(2, 10) = 2, 3, ..., 9`

Vb.: `range(2, 10, 3) = 2, 5, 8`

Stappen van 3

Opm.: range bevat in zekere zin teller van de while-loop!

Ben ik mee: **while veranderen naar for-lus**

Voorbeeld:

```
i = 1
while i < 11 :
    print(i)
    i = i + 1
```

while version

```
for i in range(1, 11) :
    print(i)
```

for version

Uitbreiding `"print()"`

The `end=""` suppresses the new line,  
so the numbers are all printed on the same line

Geziena variabelen: Strings, Integers, Floating points, Booleans  
Nieuwe variabelen: **lists**, tupels, sets, dictionaries, ...

**Lijst** = groep geordende elementen

Values = `[x1, x2, ..., xn]`

First value = `values[0] = x1`

Opm.: `values[n] = ERROR`

Length = `len(values) = n`

Empty list = `[]`

`values[n-1] = values[-1] = xn`

Opm.: `values[-(n+1)] = ERROR`

**Waarde** en **index**

Opm.: "values" is ook de lijstnaam!

**Voorbeeld:**

Values = `[32, 54, 67, 29, 35, 80, 115]`

First value = `values[0] = 32`

`Values[7] = ERROR`

Length = `len(values) = 7`

Empty list = `[]`

`Values[6] = values[-1] = 115`

`Values[-8] = ERROR`

INDEX VALUE

↓ ↓

[0]	32
[1]	54
[2]	67
[3]	29
[4]	35
[5]	80
[6]	115

**Traversing lists:**

```
For i in values:
    Print(i)
```

```
For i in range(n):
    Print(i, values[i])
```

```
For i in range(len(values)):
    Print(i, values [i])
```

Output = lijst

### Manipulaties met lijsten:

Elementen toevoegen:

Append: achteraan bijvoegen  
Listname.append(x)  
Insert: vooraan bijvoegen  
Listname.insert(plaats, x)

Elementen verwijderen:

Remove: verwijderd waarde  
Listname.remove(x)  
Pop: verwijderd laatste waarde  
Listname.pop()  
" : waarde bij index  
Listname.pop(index)  
Clear: maakt lijst leeg  
Listname.clear()

Info over de lijst:

Index: index van waarde  
(eerstvoorkomende als deze herhaald w)  
Listname.index(x)  
Count: hoe vaak een waarde herhaald w  
Listname.count(x)  
In: gaat na of waarde voorkomt in lijst  
(respons true/false)  
x in list  
Sum: som alle elementen  
Sum(list)  
Max: grootste element uit lijst  
Max(list)  
Min: kleinste element uit lijst  
Min(list)

Transformaties met lijst:

Reverse: omkeren van lijst  
Listname.reverse()  
Sort: sorteert de lijst (standaardwaarden  
of volgens eigen criteria)  
Listname.sort()  
Copy: lijst kopiëren  
Listname.copy()

Tables  
?!

**tuple** = geordende lijst, onveranderlijk en enkel-lezen

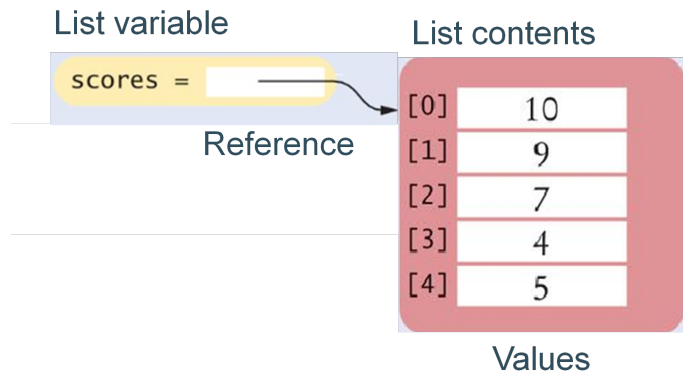
Omzetting lijst --> tuple

```
L = [1, 2, 3]
T = tuple(L) #(1, 2, 3)
```

Omzetting tuple --> lijst

```
T = (1, 2, 3)
L = list(T) #[1, 2, 3]
```

### Reference semantics



Opm.: scores = values

```
scores = [10, 9, 7, 4, 5]
values = scores # Copying list reference
```

```
...
scores[3] = 10
print(values[3]) # Prints 10
```

= aliases

**Slicing** = lijsten 'snijden' om sublists te creëren

Sublist t [i : j] deel van lijst t bevat i, i+1, ..., j-1

Opm.: de omkering t [-i : -j] is ook mogelijk!

Standaardwaarde voor sublists is index 0 als ondergrens en lengte van de lijst, len(t) als bovengrens

--> geen onder- of bovengrens ingeven snijdt kop of staart af  
Te grote of kleine waarde? W gecorrigeerd naar standaardwaarden

**Populating** = vullen van lijsten

☁ Vb.: lijst van kwadraten natuurlijke getallen 1-9  
Manier 1:

```
squares = []
for x in range(10):
    squares.append(x ** 2)
# squares = [0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81]
```

Manier 2:

```
squares = [x ** 2 for x in range(10)]
# squares = [0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81]
```

# Les 4 21/10

21 October 2021 14:07

## FUNCTIES

**Functies** geven structuur aan programma's, bakken delen af in programma (leesbaarheid en snellere berekeningen)

Je geeft een naam aan een opvolging van instructies en inputs

Functie heeft steeds een of meerdere inputs/parameters en geeft een resultaat of output terug

💡 Een functie kan ook niets terug geven in Python

### ☁ **Functie definiëren:**

Def variabele (parameter 1, parameter 2, ...)  
+ statements

Vb.:

```
def cube_volume(side_length):  
    volume = side_length ** 3  
    return volume
```

Gebruik de variabele om de uitkomst van de functie terug te printen

### ★ **De main-functie**

= hoofdfunctie van het programma

Afspraak dat deze functie in elk programma voorkomt, de te printen variabele is ook aan deze functie gekoppeld

☁ Vb.:

```
def main():  
    result = cube_volume(2)  
    print("A cube with side length 2 has volume", result)
```

```
def cube_volume(side_length):  
    volume = side_length ** 3  
    return volume
```

main()

### **Returnopdracht**

--> gebruik vanaf zekerheid uitkomst

Nut?

- Eindigt functie
- Koppelt eindwaarde terug aan functie

Meerdere returnopdrachten

= mogelijk

1 opdracht per geopende functie

Vb.:

```
def cube_volume(side_length):  
    if (side_length < 0):  
        return 0  
    return side_length ** 3
```

Afslanken van aantal opdrachten door variabele aan return te koppelen

Vb.:

```
def cube_volume(side_length) :  
    if side_length >= 0:  
        volume = side_length ** 3  
    else:  
        volume = 0  
    return volume
```

Opm.: koppel aan elke 'tak' een return!

### **Variabelen in functies**

Lokale variabele: bestaat enkel binnen de functie

Parametrische variabele: de waarde van het argument in de functie

Vb. dia 24 (met animatie)

Globale variabelen

Iteratieve functies?

Globale variabelen?

Opm.: definieer de variabelen duidelijk genoeg, duidelijkheid bij print gebruik juiste waarden voor de variabelen

### **Testen van een functie?**

Manueel: run via print

Automatisch: ASSERT commando

= assert + booleaanse expressie

True: niks gebeurt

False: AssertionError w gegenereerd

Assert

[https://www.w3schools.com/python/ref\\_](https://www.w3schools.com/python/ref_)

### **Stepwise refinement**

= afbreken vraagstuk in deelproblemen adhv functies

Nut? oplosbaarheid, leesbaarheid, stapsgewijs testen (en vinden van fouten)

Vb.

Ask the user for a positive integer and perform input validation using a while-loop, print out all prime numbers that are smaller or equal to the input number.

Assert

[https://www.w3schools.com/python/ref\\_keyword\\_assert.asp](https://www.w3schools.com/python/ref_keyword_assert.asp)

Ask the user for a positive integer and perform input validation using a while-loop, print out all prime numbers that are smaller or equal to the input number.

```
def can_be_divided_by (n, d):  
    return n % d == 0  
  
def is_prime_number (n)  
    ...  
def ask_number_with_input_validation ():  
    ...  
def main ():  
    ...  
main()
```

### Recursieve functies

= functie die zichzelf terug oproept

Stop inbouwen voor functie (w speciaal geval van uitkomst vorige uitvoering functie)

Vb.: Fibonacci

Iteratief:

```
def fibonacci (number) :  
    if number == 0:  
        return 0  
    elif number == 1:  
        return 1  
    else:  
        fib_min_2 = 1  
        fib_min_1 = 1  
        fib = fib_min_1 + fib_min_2  
        for i in range (number-2) :  
            fib = fib_min_1 + fib_min_2  
            fib_min_2, fib_min_1 = fib_min_1, fib  
        return fib
```

Recursief:

```
def fibonacci(n):  
    if number == 0:  
        return 0  
    elif number == 1:  
        return 1  
    else:  
        fib = fibonacci (n - 1)  
            + fibonacci (n - 2)  
    return fib
```

Trager in verwerking, maar eleganter om te lezen en te begrijpen

# Les 5 28/10

28 October 2021 23:11

## CORRECTHEIDSBEWIJZEN

= het nagaan of een stuk code al dan niet correct is (zonder run)

### Specificatie

= beschrijving **wat** een stuk code moet doen

'een programma is correct als het voldoet aan zijn specificatie'

Pre-conditie: conditie waaronder het programma moet werken (bv met integers)

Post-conditie: conditie waar het programma op het einde aan moet voldoen (m.a.w. het resultaat)

Vb.:

“Schrijf een programma dat voor een natuurlijk getal n, de faculteit van n berekent.”

Pre-conditie: n is een geheel getal, groter dan 0

Post-conditie: de variabele fac bevat de faculteit van n, dus n !

### Implementatie

= beschrijving **hoe** een stuk code moet evalueren

### Partiële vs. Totale correctheid

De regel voor partiële correctheid kan gebruikt worden om te verifiëren dat, **als** de lus eindigt, de uitvoering eindigt waarbij aan eindtoestand {Q} is voldaan.  
--> lusINvariant

Om de totale correctheid van een lus te verifiëren moeten we aantonen **dat** de lus eindigt.  
--> lusVARIANT

Opm.: w opgebouwd uit een partieel bewijs

{P}

while E:  
p

{Q}

```

assert 0 <= n and i == 0 and som == 0
assert som == sum (range (i + 1))

while i != n:
    oude_variant = n - i
    assert (som == sum (range (i+1))) and i != n and n-i == oude_variant
    #OK
    assert som + (i+1) == sum (range (i+2)) and 0 <= n-(i+1) < oude_variant
    i = i + 1
    assert som + i == sum (range (i+1)) and 0 <= n-i < oude_variant
    som = som + i
    assert som == sum (range (i + 1)) and 0 <= n-i < oude_variant

assert (som == sum (range (i + 1))) and i == n
assert som == sum (range(n+1)) # som == som van 0 t.e.m. n

```

## Set = verzameling

'Container' of datastructuur in geheugen die datatypes (float, int, string) bevat

### Elementen?

- Ongeordend
- Uniek (geen herhaling van elementen)

### Aanmaken:

Lege set: `my_set = set()`

Gevulde set: `my_set = {e1, e2, ...}`

### Operaties met sets

- Additie  
`.add(e)`  
`.update([e1, e2, ...])`
- Eliminatie  
`.remove(e)`  
ERROR als element e niet in lijst  
`.discard(e)`  
Geen reactie als e niet in lijst  
`.clear()`
- Iteratie  
For element in list:  
`Print(element)`
- Sorteren  
`Sorted(set)`
- Samenvoegen  
`My_set = one_set.union(other_set)`



List = [1, 2, 3, 4]

Set = {1, 2, 3, 4}

Dict = {1: Miet, 2: Staf, 3: Sooi, 4: Melanie}

### List vs Set

List: volgorde en # voorkomens relevant

Set: volgorde en # voorkomens niet relevant, werkt sneller dan list

### Operaties met sets

Table 1 Common Set Operations	
Operation	Description
<code>s = set()</code> <code>s = set(seq)</code> <code>s = {e1, e2, ..., en}</code>	Creates a new set that is either empty, a duplicate copy of sequence <i>seq</i> , or that contains the initial elements provided.
<code>len(s)</code>	Returns the number of elements in set <i>s</i> .
<code>element in s</code> <code>element not in s</code>	Determines if <i>element</i> is in the set.
<code>s.add(element)</code>	Adds a new element to the set. If the element is already in the set, no action is taken.
<code>s.discard(element)</code> <code>s.remove(element)</code>	Removes an element from the set. If the element is not a member of the set, <code>discard</code> has no effect, but <code>remove</code> will raise an exception.
<code>s.clear()</code>	Removes all elements from a set.
<code>s.issubset(t)</code>	Returns a Boolean indicating whether set <i>s</i> is a subset of set <i>t</i> .
<code>s == t</code> <code>s != t</code>	Returns a Boolean indicating whether set <i>s</i> is equal to set <i>t</i> .
<code>s.union(t)</code>	Returns a new set that contains all elements in set <i>s</i> and set <i>t</i> .
<code>s.intersection(t)</code>	Returns a new set that contains elements that are in <i>both</i> set <i>s</i> and set <i>t</i> .
<code>s.difference(t)</code>	Returns a new set that contains elements in <i>s</i> that are not in set <i>t</i> .

Dictionaries = woordenboeken

'container' of datastructuur die unieke sleutels aan een (niet-unieke) waarde koppelt. Deze sleutels worden op hun beurt opgeslagen als een set.

Aanmaken:

Lege dict: `my_dict = {}`

Gevulde dict: `m_dict = {k1: e1, k2: e2, ...}`

Operaties met dict

- Additie

`dict[k1] = v`

k1 in dict? Aanpassing naar v

k1 niet in dict? Toevoeging v

- Eliminatie

`del dict[k1]`

`dict.clear()`

- Iteratie

`dict[k1]`

ERROR als k1 niet bestaat

`dict.get(k1)`

Geen reactie als k1 niet bestaat

Operaties met dict

Table 2 Common Dictionary Operations

Operation	Returns
<code>d = dict()</code> <code>d = dict(c)</code>	Creates a new empty dictionary or a duplicate copy of dictionary <i>c</i> .
<code>d = {}</code> <code>d = {k<sub>1</sub>: v<sub>1</sub>, k<sub>2</sub>: v<sub>2</sub>, ..., k<sub>n</sub>: v<sub>n</sub>}</code>	Creates a new empty dictionary or a dictionary that contains the initial items provided. Each item consists of a key ( <i>k</i> ) and a value ( <i>v</i> ) separated by a colon.
<code>len(d)</code>	Returns the number of items in dictionary <i>d</i> .
<code>key in d</code> <code>key not in d</code>	Determines if the key is in the dictionary.
<code>d[key] = value</code>	Adds a new <i>key/value</i> item to the dictionary if the <i>key</i> does not exist. If the key does exist, it modifies the value associated with the key.
<code>x = d[key]</code>	Returns the value associated with the given key. The key must exist or an exception is raised.
<code>d.get(key, default)</code>	Returns the value associated with the given key, or the default value if the key is not present.
<code>d.pop(key)</code>	Removes the key and its associated value from the dictionary that contains the given key or raises an exception if the key is not present.
<code>d.values()</code>	Returns a sequence containing all values of the dictionary.

**Best & worst case**

- vaste implementatie algoritme
- vaste invoergrootte n

Verskil:

**Best case** = invoer met minimaal tijdsgebruik, min aantal operaties  
**Worst case** = invoer met maximaal tijdsgebruik, max aantal operaties  
**Average case** = invoer zonder verdere beperkingen en veronderstellingen  
 ≠ gemiddelde van worst en best case!

Voorbeelden:

Insertion sort: best case = gesorteerde lijst; worst case = omgekeerd gesorteerde lijst

**Kostenmodel**

Opstellen van tijdsverloop algoritme adhv basisoperaties {op} met bepaalde uitvoeringstijd {t\_op}

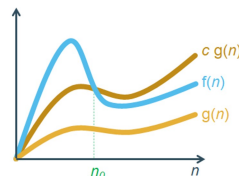
Vereenvoudiging & gevolg:

Elke basisoperatie zelfde cste tijd & herschaling naar uitvoeringstijd = 1  
 --> tellen van basisoperaties ipv tijdseenheden

**Grote O**

= gedrag functie voor grote n (geeft geen exact aantal uitvoeringen!)

Definitie:  $f(n) = O(g(n)) \iff \exists c, n_0: \forall n \geq n_0: f(n) \leq c g(n)$   
 Intuïtief: eens n groot genoeg is, dan stijgt f(n) minder snel dan g(n)  
 Praktisch:  $f(n) \approx c * g(n)$  voor grote n



Voorbeelden:

$3n^{**2} + 2n$	$3n^{**2} > 2n \rightarrow 2n$ is verwaarloosbaar en macht groeit sneller dan veelvoud $\rightarrow 3n^{**2} + 2n = O(n^{**2})$
$3 \log_3(n) + 7$	$3 \log_3(n) + 7 \rightarrow$ grondtal (hier 3) maakt niet in grote O $\rightarrow O(\log_3(n))$
$3^{**n} + 2^{**n} + n \log(n)$	$3^{**n} + 2^{**n} + n \log(n) \rightarrow$ Log groeit trager dan macht $\rightarrow O(3^{**n})$

Vaak voorkomen de grenzen

- $O(1)$  constant  
 $T(n) \cong c \cdot 1$   
 $T(k \cdot n) \cong c \cdot 1 \cong T(n)$
- $O(n^2)$  kwadratisch  
 $T(n) \cong c \cdot n^{**2}$   
 $T(k \cdot n) \cong c \cdot (k \cdot n)^{**2} \cong k^{**2} \cdot T(n)$
- $O(\log n)$  logaritmisch  
 $T(n) \cong c \cdot \log n$   
 $T(n^{**k}) \cong c \cdot \log n^{**k} = k \cdot c \cdot \log n \cong k \cdot T(n)$
- $O(n^3)$  kubisch  
 $T(n) \cong c \cdot n^{**3}$   
 $T(k \cdot n) \cong c \cdot (k \cdot n)^{**3} \cong k^{**3} \cdot T(n)$
- $O(n)$  lineair  
 $T(n) \cong c \cdot n$   
 $T(k \cdot n) \cong c \cdot k \cdot n \cong k \cdot T(n)$
- $O(2^n)$  exponentieel  
 $T(n) \cong c \cdot 2^n$   
 $T(n+k) \cong c \cdot 2^{n+k} = c \cdot 2^n \cdot 2^k \cong 2^k \cdot T(n)$
- $O(n \log n)$  linearitisch  
 $T(n) \cong c \cdot n \cdot \log n$   
 $T(nk) \cong c \cdot nk \cdot \log nk = c \cdot n \cdot nk \cdot (\log n + \log k) \cong nk \cdot \log n + nk \cdot \log k \cong nk \cdot \log n + k \cdot T(n)$
- $O(n!)$  factorieel  
 $T(n) \cong c \cdot n!$   
 $T(n+k) \cong c \cdot (n+k)! = c \cdot n! \cdot (n+k)!/n! \cong (n+k)!/n! \cdot T(n)$

Conclusie: exp & fac onbruikbaar --> te grote uitkomsten (zelfs voor kleine n)

**Invoergrootte n**

Bij getal als invoer

- = x (waarde van x)
- =  $1 + \lceil \log_2 x \rceil$  (aantal cijfers/bits in x)

Bij collectie (set, list, etc.) als invoer

- = len(xs) (aantal elementen)

**Metten en plotten**

--> assert, input, verwerking etc. w vanzelf meegeteld, we zoeken echter puur de 'tijd' van het algoritme

**Basisoperaties:**

- Bewerkingen op getallen (indien niet te groot)  
 $+ \ - \ / \ // \ \%$
- Vergelijken van getallen  
 $= \ < \ > \ <= \ >=$
- Lezen en schrijven van een variabele  
 $x \ x=...$
- Lezen en schrijven van een element in een lijst (geheugenlocatie)  
 $x[i] \ x[i]=...$



**Basisoperaties en grote O**

- Basisoperaties:  $O(1)$
- Operatie op lijst (legte = n):  
 lege lijst maken:  $O(1)$   
 len(lst):  $O(1)$   
 lst[i], lst[i]=... :  $O(1)$   
 lst.append(x):  $O(1)$   
**lst.insert(i, x):**  
 best  $O(1)$  – i is einde lijst (=append)  
 worst  $O(n)$  – i is begin lijst  
**lst.count(x):  $O(n)$**   
**x in lst:**  
 best  $O(1)$  – x op eerste plaats  
 worst  $O(n)$  – x niet in lst  
 range(n):  $O(1)$   
**list(range(n)):  $O(n)$**   
**slice lst[i:i+k]:  $O(k)$**
- Operatie op dict/set (#elementen = n):  
 lege set/dictionary maken:  $O(1)$   
 len:  $O(1)$   
 x in set/dict:  $O(1)$   
 dict[key], dict[key]=add, get, remove:  $O(1)$

**Rekenregels grote-O**

- $O(f) + O(g) = \max(O(f), O(g))$   
 Sequentie van instructies
- $c \times O(f) = O(f)$   
 Herhaling, aantal keer (c) is onafhankelijk van n  
 Tijdscomplexiteit onafhankelijk met c
- $O(f) \times O(g) = O(f \times g)$   
 Herhaling, aantal keer is afhankelijk van n  
 Tijdscomplexiteit afhankelijk met andere functie

$f = f(n)$   
 $g = g(n)$

**Tijdscomplexiteit iteratieve functies**

--> redeneren adhv rekenregels:

1. **Definieer n** in functie van invoer
2. Bepaal **worst/best case**;  
 voor elke case afzonderlijk volgende 3 stappen:
3. Bepaal **lussen** waarvan aantal iteraties afhangt van n (+ het aantal herhalingen in functie van n)
4. Bepaal complexiteit van **andere operaties** (inclusief luslichamen)
5. **Combineer** met de rekenregels

Vb: (ben ik mee-oefening)

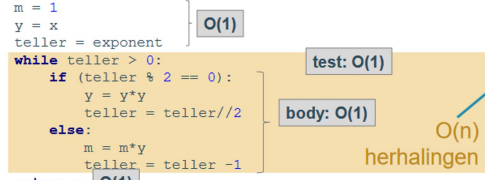
**Oplossing**

1. **Definieer n**
2. Bepaal **worst/best case**; voor elke case afzonderlijk:
3. Bepaal **lussen** + aantal herhalingen
4. Bepaal complexiteit van **andere operaties**
5. **Combineer** met de rekenregels

$n = \log_2(\text{exponent})$  (dit is het aantal bits nodig om de exponent voor te stellen)  
**best case = de exponent is een macht van twee**

1.  $O(f) + O(g) = \max(O(f), O(g))$
2.  $c \times O(f) = O(f)$
3.  $O(f) \times O(g) = O(f \times g)$

```
def macht_binair_iter(x, exponent):
    m = 1
    y = x
    teller = exponent
    while teller > 0:
        if (teller % 2 == 0):
            y = y*y
            teller = teller//2
        else:
            m = m*y
            teller = teller - 1
    return m
```



- Denk eraan dat n hier staat voor het aantal bits nodig om de exponent voor te stellen
- Bij de best case is de exponent in het binair van de vorm 10000... waar het aantal nullen gelijk is aan n.
- In elke loop wordt dit getal gedeeld door twee, waardoor het aantal bits verminderd met 1

$T(n) = O(1) + O(n) \times (O(1) + O(1)) + O(1) = O(n)$

code voor lus    herhaling lus    test van lus    body van lus    code na lus

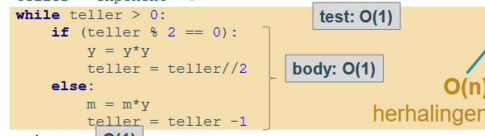
**Oplossing**

1. **Definieer n**
2. Bepaal **worst/best case**; voor elke case afzonderlijk:
3. Bepaal **lussen** + aantal herhalingen
4. Bepaal complexiteit van **andere operaties**
5. **Combineer** met de rekenregels

$n = \log_2(\text{exponent})$  (dit is het aantal bits nodig om de exponent voor te stellen)  
**worst case = de exponent is een macht van twee min 1** (bv.  $2^7 - 1 = 255$ )

1.  $O(f) + O(g) = \max(O(f), O(g))$
2.  $c \times O(f) = O(f)$
3.  $O(f) \times O(g) = O(f \times g)$

```
def macht_binair_iter(x, exponent):
    m = 1
    y = x
    teller = exponent
    while teller > 0:
        if (teller % 2 == 0):
            y = y*y
            teller = teller//2
        else:
            m = m*y
            teller = teller - 1
    return m
```



- Bij de worst case is de exponent in het binair van de vorm 11111... waar het aantal 1'en gelijk is aan n.
- Om elke bit in de exponent te verwerken wordt de lus twee keer uitgevoerd: eerst door de else branch en in de lus erna door de if branch.
- De lus wordt dus  $O(2n)$  keer herhaald, wat gelijk is aan  $O(n)$ .

$T(n) = O(1) + O(n) \times (O(1) + O(1)) + O(1) = O(n)$  → De best en worst case resulteren dus in dezelfde grote O tijdscomplexiteit!

code voor lus    herhaling lus    test van lus    body van lus    code na lus

## Tijdscomplexiteit recursieve functies

### 1: opstellen recursievergelijking

1. **Definieer n** in functie van invoer
  2. Complexiteit **basisgeval**
  3. Complexiteit **recursieve oproeping**
    - o **Hoeveel** recursieve oproepen?
    - o Hoe **verandert n**?
  4. Complexiteit **alles behalve recursieve oproep**
  5. **Samenvoegen** stap 3 & 4
- 2: geziene vergelijking?
- JA: gebruik gekende oplossing
  - NEE: substitutie
    1. Doe 1 substitutie
    2. Herhaal stap 1 tot stap 3
    3. Veralgemeen met parameter k --> patroon
    4. Bepaal min waarde van k, leidt tot basisgeval
    5. k uit stap 4 invullen in stap 3: grote O bepalen

## Geziene recursievgl

$$\bullet T(n) = T(n-1) + c$$

$$\bullet T(n) = O(n)$$

vb. Factorial, diameter bekers

$$\bullet T(n) = T(n/2) + c$$

$$\bullet T(n) = O(\log_2 n)$$

vb. Binary search

$$\bullet T(n) = 2 T(n-1) + c$$

$$\bullet T(n) = O(2^n)$$

vb. Hanoi

$$\bullet T(n) = 2 T(n/2) + c n$$

$$\bullet T(n) = O(n \log_2 n)$$

vb. Quicksort, Mergesort

Controle: wolframalpha

**Principe**

*generereert* partiële oplossingen,  
*onderzoekt* of die kunnen leiden tot volwaardige oplossingen,  
en *komt op haar stappen terug* indien een partiële oplossing ongeschikt blijkt  
--> specifiek problemen met randvoorwaarden

**Varianten** in backtrackingproblemen

1. Bestaat er een oplossing?
2. Als er een oplossing bestaat, geef de oplossing.
3. Geef alle oplossingen.
4. Geef de oplossing die aan voorwaarde voldoet...  
Bvb. kortste, langste, efficiëntste, ...

**Template backtracking algoritme**

2 delen:

1. Examine  
Onderzoeken partiële oplossing:
  - o Definitieve oplossing?
  - o Geldige oplossing? (maw moeten we het pad verlaten)
  - o Deel van volledige oplossing? Extend!
2. Extend  
Uitbreiden partiële oplossing in de hoop volwaardige opl te vinden

Pseudocode als template (variant 3):

## Pseudocode van een backtracking-algoritme

```
def solve(partial_solution):  
    exam = examine(partial_solution)  
    if exam == ACCEPT:  
        print(partial_solution)  
    elif exam != ABANDON:  
        for p in extend(partial_solution):  
            solve(p)
```