

Zij $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een strikt stijgende rij in \mathbb{R} met $r_0 = 0$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 1$. Zij $\alpha > 0$. Definieer de functie

$$f : [0, 1) \rightarrow [0, +\infty] : f(x) = \begin{cases} (x - r_n)^{-\alpha} & \text{als } r_n < x < r_{n+1} \text{ voor } n \in \mathbb{N}, \\ +\infty & \text{als } x = r_n \text{ voor } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Geef een formule voor $\int_{[0,1)} f(x) dx$ in termen van (r_n) en α . Bewijs deze formule.
Maak onderscheid tussen $\alpha < 1$, $\alpha = 1$ en $\alpha > 1$.
2. Kan je $\alpha > 0$ en (r_n) zo kiezen dat $\int_{[0,1)} f(x) dx < +\infty$? Bewijs je antwoord.
Één voorbeeld volstaat.

Dit was een examenvraag in februari 2012, met uitzondering van de cursieve tekst.