

Toepassingen van de Algebra in de Informatica: Examen 28 januari 2020

1. (2pt): Veronderstel dat H een deelgroep is van de groep G waarbij we de samenstellingswet multiplicatief noteren. Beschouw een element a van G en definieer de verzameling aHa^{-1} als

$$aHa^{-1} = \{aha^{-1} | h \in H\}.$$

Toon aan dat aHa^{-1} ook een deelgroep is van G .

2. (2pt): Bewijs dat de veelterm $f(x) = 1 + x + x^3 + x^4$ altijd reduceerbaar is over elk veld \mathbb{F} .
3. (2pt): Geef de priemfactorisatie van $a(x) = x^3 + 10x^2 + 7$ met $a(x) \in \mathbb{Z}_{11}[x]$. Geef een gedetailleerd antwoord.
4. (2pt): Is $x^2 + 1$ een primitieve veelterm over $GF(3)$? Met andere woorden, kan deze veelterm gebruikt worden om $GF(3^2)$ op te stellen? Bewijs je antwoord.
5. (3pt):
- (a) Bepaal de generatormatrix en de pariteitstestmatrix van de $(6, 4)$ Hamming-code over $GF(5)$.
 - (b) Codeer het informatiewoord: $[0 \ 1 \ 2 \ 3]$
 - (c) Decodeer het ontvangen woord (waarop hoogstens één fout zit): $[4 \ 3 \ 0 \ 0 \ 1]$. Wat is het bijhorende informatiewoord?
6. (3pt): Gegeven een $(10, 4)$ RS-code over $GF(11)$ met $t = 3$ en $l = 0$. De primitieve 10^e wortel uit 1 werd geconstrueerd op basis van de primitieve veelterm $5 + x$ over $GF(11)$. Bepaal **met het PGZ-algoritme** de foutlocatorveelterm voor het ontvangen woord: $v = 0 \ 2 \ 0 \ 1 \ 0 \ 9 \ 0 \ 9 \ 0 \ 1$. Enkele syndromen zijn: $S_2 = 7$, $S_3 = 6$, $S_4 = 3$ en $S_5 = 5$. Bepaal ook de locaties in het ontvangen woord waar er een fout optreedt. De waarde van deze fouten en het informatiewoord moeten **niet** bepaald worden.
7. (2pt): Bepaal de generatorveelterm van de cyclische blokcode van lengte 63 over $GF(8)$ met maximale dimensie waarvoor α^{26} en α^{60} nulpunten zijn van elk codewoord met α een nulpunt van een primitieve veelterm over $GF(8)$ en γ een nulpunt van de primitieve veelterm $x^3 + x + 1$ over $GF(2)$. De veelterm mag gegeven worden in gefactoriseerde vorm via zijn nulpunten. Dus de factoren moeten **niet** samengenomen worden tot je veeltermen uitkomt behorende tot $GF(8)[x]$. Wat is de dimensie van deze code?
8. (4pt): Gegeven een encoder voor een $(3, 1)$ convolutionele code.
- (a) Bepaal de generatorveeltermen $g^{(j)}(x)$, $j = 1, 2, 3$
 - (b) Construeer het toestandsdiagramma van de encoder.
 - (c) Bepaal de minimale afstand (d_{min}) en de vrije afstand ($d_{free} = d_{\infty}$)
 - (d) Codeer het informatiewoord $1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1$
 - (e) Decodeer met het Viterbi algoritme het ontvangen woord (van de convolutionele code): $101 \ 001 \ 001 \ 000 \ 110 \ 111 \ 010$. Hierbij werden de bits van het informatiewoord aangevuld om de encoder te resetten, te klaren. Wat is het gedecodeerde informatiewoord?

